Aproksimiranje podataka krivuljom

Aproksimiranje podataka krivuljom (engl. *curve fitting*), naziva se još i regresijska analiza (engl. *regression analysis*), je postupak uklapanja funkcije u skup točaka koje predstavljaju određene podatke. Ta funkcija može služiti kao matematički model tih podataka i možda neće prolaziti ni kroz jednu točku, ali modelira podatke s najmanjom mogućom pogreškom. Izbor funkcija koje se mogu upotrijebiti za aproksimiranje podataka krivuljom nije ničim ograničen. Vrlo često se koriste polinomi, racionalne, eksponencijalne i logaritamske funkcije. Budući da postoji velik broj funkcija, pronalaženje odgovarajuće funkcije za aproksimiranje podataka krivuljom može biti složen postupak. Ponekad postoje određene naznake na osnovu kojih se može zaključiti koja bi vrsta funkcije odgovarala određenom skupu podataka. U drugim slučajevima, potrebno je isprobavati različite krivulje kako bi se otkrili mogući oblici funkcije koja bi dobro aproksimirala podatke.

Polinomi (engl. *polynomials*) su matematički izrazi koji se često koriste za rješavanje zadataka i modeliranje u prirodnim i tehničkim znanostima. Polinomi su funkcije koje imaju sljedeći oblik:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Koeficijenti polinoma $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ su realni brojevi, a *n*, koji mora biti cjelobrojna pozitivna vrijednost, predstavlja stupanj ili red polinoma. Rješenja polinoma su vrijednosti argumenta za koje je vrijednost polinoma jednaka nuli, pa se često zovu i nule (ili korijeni) polinoma.

Polinomi se mogu upotrijebiti za aproksimiranje podataka na dva načina. U prvom slučaju polinom prolazi kroz sve točke, dok u drugom slučaju, polinom ne prolazi obavezno kroz sve točke, ali ipak dobro aproksimira podatke.

Kada postoji *n* točaka (x_i, y_i), može se napisati polinom stupnja *n-1* koji prolazi kroz sve točke. Koeficijenti polinoma se mogu odrediti tako što se svaka točka zamijeni u polinomu, a zatim se riješi sistem sa *n* jednadžbi da bi se izračunali koeficijenti.

Kada postoji *n* točaka, može se napisati i polinom stupnja manjeg od *n-1*, koji ne prolazi možda ni kroz jednu točku, ali omogućava aproksimiranje podataka. Najčešća metoda pronalaženja najbolje aproksimacije točaka, je metoda najmanjih kvadrata (engl. *least squares method*). Po toj metodi, koeficijenti polinoma se određuju minimiziranjem zbroja kvadrata razlike između vrijednosti polinoma određenog stupnja i vrijednosti podataka u svim točkama. Rezidual (engl. *residual*) u svakoj točki se definira kao razlika između vrijednosti polinoma i vrijednosti podatka.

Neka je potrebno odrediti koeficijente polinoma prvog stupnja koji aproksimira podatke 4 točke. Neka su koordinate točaka (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) i (x_4, y_4), a polinom prvog stupnja može se napisati kao $f(x) = a_1 x + a_0$. Rezidual R_i u svakoj točki predstavlja razliku između vrijednosti funkcije i koordinata (x_i, y_i), $R_i = f(x_i) - y_i$. Jednadžba koja izračunava zbroj kvadrata reziduala R_i u svim točkama izgleda ovako:

$$R = [f(x_1) - y_1]^2 + [f(x_2) - y_2]^2 + [f(x_3) - y_3]^2 + [f(x_4) - y_4]^2$$

ili nakon zamjene jednadžbom polinoma prvog stupnja u svakoj točki:

$$R = [a_1 x_1 + a_0 - y_1]^2 + [a_1 x_2 + a_0 - y_2]^2 + [a_1 x_3 + a_0 - y_3]^2 + [a_1 x_4 + a_0 - y_4]^2$$

Rezidual R je funkcija a_1 i a_0. Najmanja vrijednost R se može izračunati parcijalnim deriviranjem R u odnosu na a_1 i a_0, što daje dvije jednadžbe koje se zatim izjednače sa nulom:

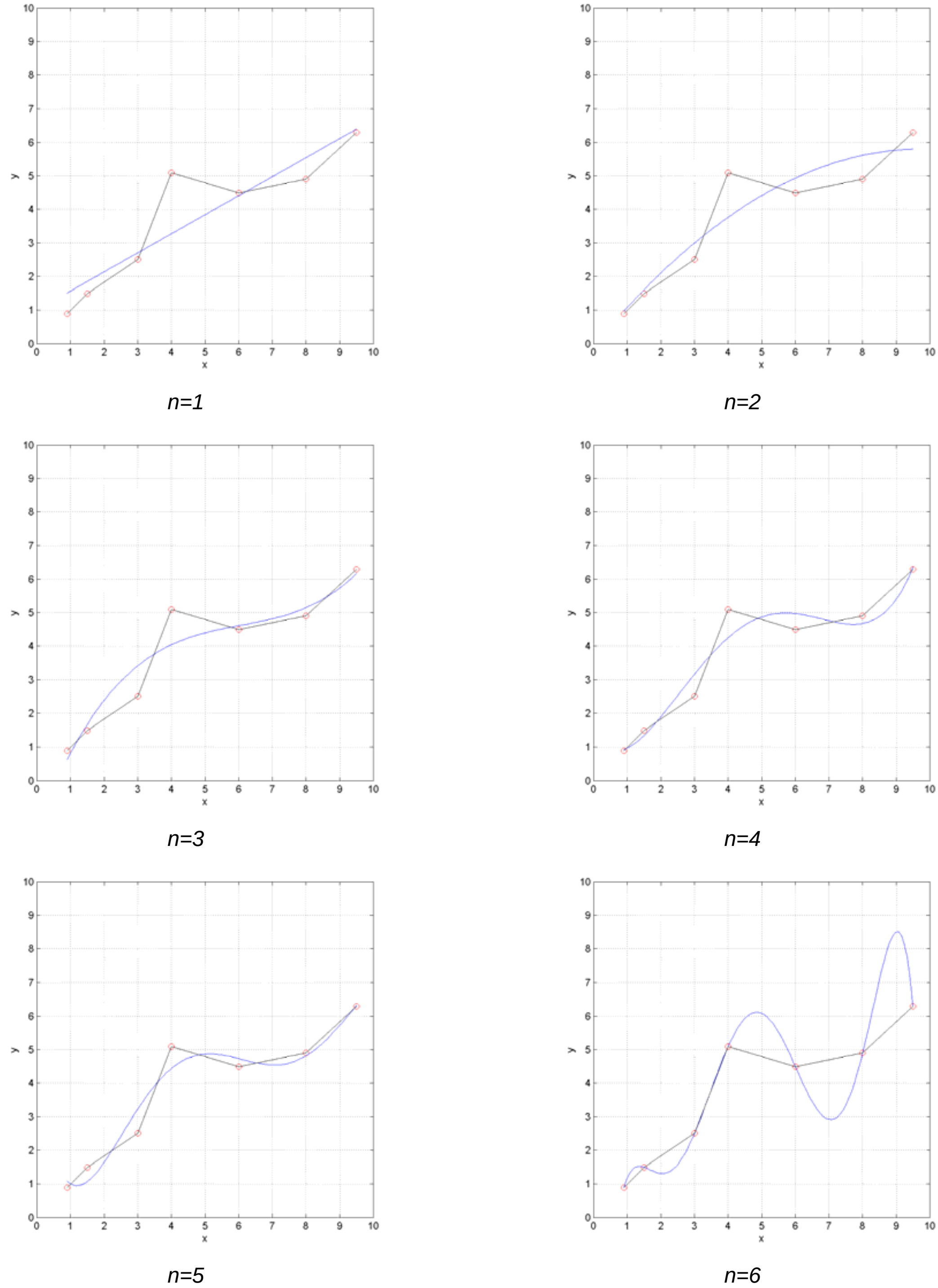
$$\frac{\partial R}{\partial a_1} = 0 \text{ i } \frac{\partial R}{\partial a_2} = 0$$

Rezultat je sistem od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, a_1 i a_0 te rješavanje tih jednadžbi daje vrijednosti koeficijenata polinoma prvog stupnja koji najbolje aproksimira podatke. Isti postupak se može upotrijebiti i na više točaka da bi se dobili polinomi višeg stupnja.

Potrebno je istaknuti da polinom koji prolazi kroz sve točke, ili polinomi višeg stupnja, ne predstavljaju obavezno najbolju aproksimaciju podataka. Polinomi visokog stupnja mogu ponekad značajno odstupati od podataka.

Primjer 1. Neka je zadan skup od 7 točaka (x_i, y_i) kojeg je potrebno aproksimirati polinomima od prvog do šestog stupnja:

x_i	0,9	1,5	3,0	4,0	6,0	8,0	9,5
y_i	0,9	1,5	2,5	5,1	4,5	4,9	6,3



Slika 1. Aproksimiranje podataka pomoću polinoma različitog stupnja

Polinom prvog stupnja (*n=1*):

$$y_1 = 0{,}5688x + 0{,}9982$$

$$\sum R_i^2 = 4{,}3130$$

Polinom drugog stupnja (*n=2*):

$$y_2 = -0{,}0617x^2 + 1{,}2030x - 0{,}0580$$

$$\sum R_i^2 = 2{,}9952$$

Polinom trećeg stupnja (*n=3*):

$$y_3 = 0{,}022x^3 - 0{,}4005x^2 + 2{,}6138x - 1{,}4158$$

$$\sum R_i^2 = 2{,}1552$$

Polinom četvrtog stupnja (*n=4*):

$$y_4 = 0{,}0101x^4 - 0{,}1896x^3 + 1{,}0567x^2 - 1{,}0693x + 1{,}1627$$

$$\sum R_i^2 = 1{,}4612$$

Polinom petog stupnja (*n=5*):

$$y_5 = -0{,}0026x^5 + 0{,}0785x^4 - 0{,}8368x^3 + 3{,}7762x^2 - 5{,}9354x + 3{,}9275$$

$$\sum R_i^2 = 1{,}2419$$

Polinom šestog stupnja (*n=6*):

$$y_6 = -0{,}0055x^6 + 0{,}1617x^5 - 1{,}7906x^4 + 9{,}3934x^3 - 23{,}9490x^2 + 28{,}4160x - 11{,}0410$$

$$\sum R_i^2 \approx 0$$

Aproksimiranje podataka plohom

Moguće je aproksimirati podatke i u *m* dimenzija, odnosno ako postoji *n* podataka $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{mi}, z_i)$ može se pronaći matematička funkcija $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ koja aproksimira te podatke.

Neka je potrebno odrediti koeficijente polinoma drugog stupnja s dvije varijable koji aproksimira podatke 4 točke. Neka su koordinate točaka (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) i (x_4, y_4, z_4), a polinom drugog stupnja s dvije varijable može se napisati kao $f(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2$. Rezidual R_i u svakoj točki predstavlja razliku između vrijednosti funkcije i koordinata (x_i, y_i, z_i), $R_i = f(x_i, y_i) - z_i$. Jednadžba koja izračunava zbroj kvadrata reziduala R_i u svim točkama izgleda ovako:

$$R = \left[f(x_1, y_1) - z_1 \right]^2 + \left[f(x_2, y_2) - z_2 \right]^2 + \left[f(x_3, y_3) - z_3 \right]^2 + \left[f(x_4, y_4) - z_4 \right]^2$$

Rezidual R je u ovom slučaju funkcija a_6, a_5, a_4, a_3, a_2 i a_1. Najmanja vrijednost R se može izračunati parcijalnim deriviranjem R u odnosu na a_6, a_5, a_4, a_3, a_2 i a_1, što daje šest jednadžbi koje se zatim izjednače sa nulom:

$$\frac{\partial R}{\partial a_6} = 0\,,\ \frac{\partial R}{\partial a_5} = 0\,,\ \frac{\partial R}{\partial a_4} = 0\,,\ \frac{\partial R}{\partial a_3} = 0\,,\ \frac{\partial R}{\partial a_2} = 0 \text{ i } \frac{\partial R}{\partial a_1} = 0$$

Rezultat je sistem od šest jednadžbi s šest nepoznanica, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2 i a_1 te rješavanje tih jednadžbi daje vrijednosti koeficijenata polinoma drugog stupnja s dvije varijable koji najbolje aproksimira podatke. Isti postupak se može upotrijebiti i na više točaka da bi se dobili polinomi višeg stupnja s dvije varijable.

I u više dimenzija se često koriste polinomi i racionalne funkcije za aproksimiranje podataka. Tako npr. polinom drugog stupnja s dvije varijable ima sljedeći oblik:

$$z = f(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2\,,$$

polinom trećeg stupnja s dvije varijable ima sljedeći oblik:

$$z = f(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2 + a_7 x^2 y + a_8 xy^2 + a_9 x^3 + a_{10} y^3\,,$$

racionalna funkcija drugog stupnja s dvije varijable ima sljedeći oblik:

$$z = f(x, y) = \frac{a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2}{b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy + b_5 x^2 + b_6 y^2}\,,$$

te racionalna funkcija trećeg stupnja s dvije varijable ima sljedeći oblik:

$$z = f(x, y) = \frac{a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2 + a_7 x^2 y + a_8 xy^2 + a_9 x^3 + a_{10} y^3}{b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy + b_5 x^2 + b_6 y^2 + b_7 x^2 y + b_8 xy^2 + b_9 x^3 + b_{10} y^3}$$

Iz ovih primjera je vidljivo da je broj koeficijenata koje je potrebno izračunati velik te da se povećava sa stupnjem polinoma i dimenzijom problema. Izbor funkcija u više dimenzija koje se mogu upotrijebiti za aproksimiranje podataka, kao i u dvodimenzionalnom slučaju, nije ničim ograničen.

U nastavku će biti prikazano nekoliko aproksimacija podataka plohom za slučajeve polinoma drugog stupnja s dvije varijable i racionalne funkcije drugog stupnja s dvije varijable. U sva tri, u nastavku prikazana, primjera podaci su aproksimirani funkcijama na temelju prethodnog znanja. Originalni podaci dobiveni su pomoću polinoma drugog stupnja s dvije varijable poznatih koeficijenata s dodatkom šuma (primjer 2. i 3.) i racionalne funkcije drugog stupnja s dvije varijable poznatih koeficijenata s dodatkom šuma (primjer 4.). Šum su slučajni brojevi iz normalne razdiobe sa srednjom vrijednošću nula i određenom standardnom devijacijom (uobičajeno označavanje slučajnih brojeva koji se ponašaju prema normalnoj razdiobi je $N(\mu, \sigma^2)$). U stvarnim slučajevima kada nije poznato prema kojoj matematičkoj funkciji se ponašaju podaci potrebno je isprobavati različite funkcije kako bi se odredilo koja od njih najbolje aproksimira podatke.

Primjer 2. Neka je zadan skup od 100 točaka (x_i, y_i, z_i) kojeg je potrebno aproksimirati polinomom drugog stupnja s dvije varijable:

x_i	y_i	z_i
-2,0000	-2,0000	23,0019
-2,0000	-1,5556	20,9340
-2,0000	-1,1111	12,4603
-2,0000	-0,6667	7,8544
-2,0000	-0,2222	7,8921
-2,0000	0,2222	11,5636
-2,0000	0,6667	12,8881
-2,0000	1,1111	10,8378
-2,0000	1,5556	17,8725
-2,0000	2,0000	24,5033
-1,5556	-2,0000	25,3339
-1,5556	-1,5556	15,1394
-1,5556	-1,1111	13,7609
-1,5556	-0,6667	6,3788
-1,5556	-0,2222	4,4916
-1,5556	0,2222	7,9259
-1,5556	0,6667	6,4685
-1,5556	1,1111	9,0528
-1,5556	1,5556	12,9645
-1,5556	2,0000	20,3393
-1,1111	-2,0000	17,6318
-1,1111	-1,5556	14,9779
-1,1111	-1,1111	5,7126

-1,1111	-0,6667	4,5792
-1,1111	-0,2222	2,5703
-1,1111	0,2222	-3,2878
-1,1111	0,6667	6,2609
-1,1111	1,1111	9,1761
-1,1111	1,5556	11,3364
-1,1111	2,0000	13,2308
-0,6667	-2,0000	14,9517
-0,6667	-1,5556	11,6785
-0,6667	-1,1111	7,3461
-0,6667	-0,6667	1,5226
-0,6667	-0,2222	3,4025
-0,6667	0,2222	0,4704
-0,6667	0,6667	2,6730
-0,6667	1,1111	3,0150
-0,6667	1,5556	13,8161
-0,6667	2,0000	17,1681
-0,2222	-2,0000	12,4655
-0,2222	-1,5556	4,1995
-0,2222	-1,1111	5,5619
-0,2222	-0,6667	2,1150
-0,2222	-0,2222	0,9609
-0,2222	0,2222	-0,5968
-0,2222	0,6667	1,8870
-0,2222	1,1111	4,6249
-0,2222	1,5556	9,8769
-0,2222	2,0000	17,9507
0,2222	-2,0000	16,8003
0,2222	-1,5556	8,1863
0,2222	-1,1111	3,7926
0,2222	-0,6667	4,7363
0,2222	-0,2222	-3,8735
0,2222	0,2222	0,3637
0,2222	0,6667	1,8452
0,2222	1,1111	3,9284
0,2222	1,5556	7,4506
0,2222	2,0000	16,2988
0,6667	-2,0000	17,8454
0,6667	-1,5556	14,1172
0,6667	-1,1111	4,8861
0,6667	-0,6667	0,8161
0,6667	-0,2222	1,0895
0,6667	0,2222	2,3610
0,6667	0,6667	-0,4712
0,6667	1,1111	7,2275
0,6667	1,5556	12,5154
0,6667	2,0000	16,7479
1,1111	-2,0000	18,4018
1,1111	-1,5556	12,7531
1,1111	-1,1111	6,0942
1,1111	-0,6667	4,1425
1,1111	-0,2222	4,2130

1,1111	0,2222	2,0270
1,1111	0,6667	2,0057
1,1111	1,1111	10,3287
1,1111	1,5556	12,9663
1,1111	2,0000	20,7343
1,5556	-2,0000	21,9796
1,5556	-1,5556	12,6831
1,5556	-1,1111	13,1797
1,5556	-0,6667	6,5677
1,5556	-0,2222	3,4975
1,5556	0,2222	3,3620
1,5556	0,6667	6,4338
1,5556	1,1111	11,0380
1,5556	1,5556	15,2876
1,5556	2,0000	19,6197
2,0000	-2,0000	23,1726
2,0000	-1,5556	19,9152
2,0000	-1,1111	11,5376
2,0000	-0,6667	9,0776
2,0000	-0,2222	11,8311
2,0000	0,2222	4,9173
2,0000	0,6667	10,3319
2,0000	1,1111	11,5892
2,0000	1,5556	18,0868
2,0000	2,0000	26,6148

Metodom najmanjih kvadrata izračunati su koeficijenti polinoma drugog stupnja s dvije varijable:

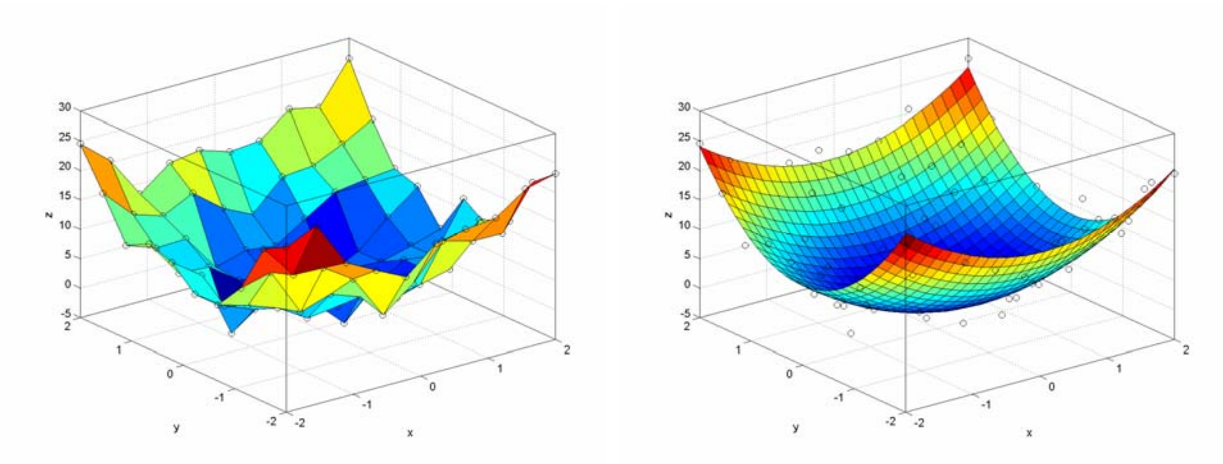
$$z = f(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2$$

$$z = f(x, y) = -0{,}4021 - 0{,}0285x - 0{,}0262y + 0{,}1522xy + 2{,}1911x^2 + 4{,}0693y^2$$

$$\sum R_i^2 = 402{,}0576$$

Originalni podaci dobiveni su funkcijom:

$$z = f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 + N(0, 4)$$



a. b.

Slika 2. Originalni podaci (a) i podaci aproksimirani polinom drugog stupnja s dvije varijable (b)

Primjer 3. Neka je zadan skup od 100 točaka (x_i, y_i, z_i) kojeg je potrebno aproksimirati polinomom drugog stupnja s dvije varijable:

x_i	y_i	z_i
-5,0000	-5,0000	1,8484
-5,0000	-3,8889	15,0304
-5,0000	-2,7778	13,4595
-5,0000	-1,6667	27,0052
-5,0000	-0,5556	23,0691
-5,0000	0,5556	22,2778
-5,0000	1,6667	29,5567
-5,0000	2,7778	13,4229
-5,0000	3,8889	8,2887
-5,0000	5,0000	0,3593
-3,8889	-5,0000	-8,8207
-3,8889	-3,8889	1,1687
-3,8889	-2,7778	10,5344
-3,8889	-1,6667	13,9617
-3,8889	-0,5556	13,5131
-3,8889	0,5556	13,3194
-3,8889	1,6667	11,1686
-3,8889	2,7778	0,5358
-3,8889	3,8889	-0,2157
-3,8889	5,0000	-9,0051
-2,7778	-5,0000	-8,5910
-2,7778	-3,8889	-5,1177
-2,7778	-2,7778	3,2601
-2,7778	-1,6667	0,6229
-2,7778	-0,5556	5,0878
-2,7778	0,5556	-0,0955
-2,7778	1,6667	8,6082
-2,7778	2,7778	-2,1878
-2,7778	3,8889	-9,8278

-2,7778	5,0000	-17,1829
-1,6667	-5,0000	-21,1763
-1,6667	-3,8889	-9,3717
-1,6667	-2,7778	-5,5863
-1,6667	-1,6667	1,7428
-1,6667	-0,5556	5,9142
-1,6667	0,5556	2,7254
-1,6667	1,6667	-6,9090
-1,6667	2,7778	-2,0741
-1,6667	3,8889	-12,1992
-1,6667	5,0000	-22,9617
-0,5556	-5,0000	-27,9503
-0,5556	-3,8889	-10,8549
-0,5556	-2,7778	-14,5342
-0,5556	-1,6667	-2,6453
-0,5556	-0,5556	3,5608
-0,5556	0,5556	-1,8245
-0,5556	1,6667	-10,0840
-0,5556	2,7778	-8,9758
-0,5556	3,8889	-19,2428
-0,5556	5,0000	-17,6614
0,5556	-5,0000	-27,5682
0,5556	-3,8889	-15,6945
0,5556	-2,7778	-5,1074
0,5556	-1,6667	-1,7886
0,5556	-0,5556	-1,9831
0,5556	0,5556	4,8107
0,5556	1,6667	-2,9174
0,5556	2,7778	-5,1561
0,5556	3,8889	-14,9374
0,5556	5,0000	-29,9828
1,6667	-5,0000	-26,5542
1,6667	-3,8889	-11,7156
1,6667	-2,7778	-10,8039
1,6667	-1,6667	2,6942
1,6667	-0,5556	3,9193
1,6667	0,5556	4,8953
1,6667	1,6667	0,2968
1,6667	2,7778	-0,6162
1,6667	3,8889	-14,9954
1,6667	5,0000	-20,3206
2,7778	-5,0000	-12,3068
2,7778	-3,8889	-7,2888
2,7778	-2,7778	2,7668
2,7778	-1,6667	2,1959
2,7778	-0,5556	7,2349
2,7778	0,5556	1,2168
2,7778	1,6667	0,6510
2,7778	2,7778	-0,8844
2,7778	3,8889	-14,1105
2,7778	5,0000	-24,0765
3,8889	-5,0000	-10,3106

3,8889	-3,8889	-1,2031
3,8889	-2,7778	1,9341
3,8889	-1,6667	15,2966
3,8889	-0,5556	13,1975
3,8889	0,5556	18,2419
3,8889	1,6667	25,7205
3,8889	2,7778	9,9132
3,8889	3,8889	5,1184
3,8889	5,0000	-12,8415
5,0000	-5,0000	4,1365
5,0000	-3,8889	7,4036
5,0000	-2,7778	18,9790
5,0000	-1,6667	25,8018
5,0000	-0,5556	23,7415
5,0000	0,5556	24,1796
5,0000	1,6667	26,3001
5,0000	2,7778	24,2777
5,0000	3,8889	13,8264
5,0000	5,0000	-1,6803

Metodom najmanjih kvadrata izračunati su koeficijenti polinoma drugog stupnja s dvije varijable:

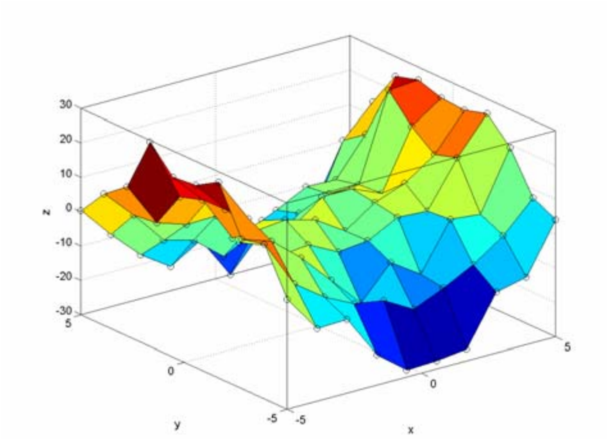
$$z = f(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2$$

$$z = f(x, y) = -0{,}6954 + 0{,}0820x - 0{,}1393y + 0{,}0553xy + 1{,}0713x^2 - 0{,}9943y^2$$

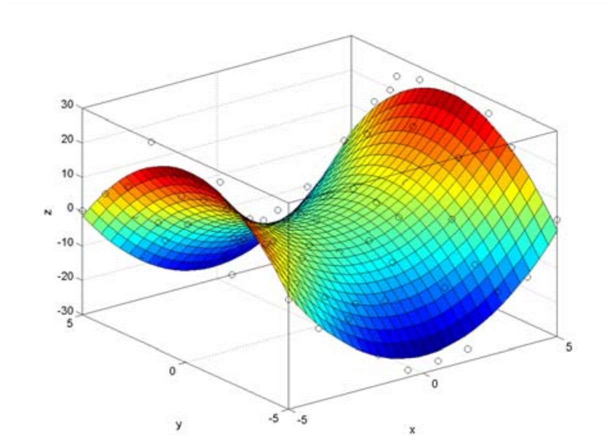
$$\sum R_i^2 = 1376{,}4$$

Originalni podaci dobiveni su funkcijom:

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2 + N(0{,}16)$$



a.



b.

Slika 3. Originalni podaci (a) i podaci aproksimirani polinom drugog stupnja s dvije varijable (b)

Primjer 4.: Neka je zadan skup od 100 točaka (x_i, y_i, z_i) kojeg je potrebno aproksimirati racionalnom funkcijom drugog stupnja s dvije varijable:

x_i	y_i	z_i
1,0000	1,0000	0,8532
1,0000	1,7778	0,6745
1,0000	2,5556	0,5471
1,0000	3,3333	0,3932
1,0000	4,1111	0,3548
1,0000	4,8889	0,3120
1,0000	5,6667	0,2175
1,0000	6,4444	0,2899
1,0000	7,2222	0,2614
1,0000	8,0000	0,2243
1,7778	1,0000	0,9052
1,7778	1,7778	0,9034
1,7778	2,5556	0,7611
1,7778	3,3333	0,6136
1,7778	4,1111	0,5799
1,7778	4,8889	0,4376
1,7778	5,6667	0,4029
1,7778	6,4444	0,3419
1,7778	7,2222	0,3384
1,7778	8,0000	0,3044
2,5556	1,0000	0,8433
2,5556	1,7778	0,9676
2,5556	2,5556	0,8592
2,5556	3,3333	0,7450
2,5556	4,1111	0,6518
2,5556	4,8889	0,6323
2,5556	5,6667	0,5861
2,5556	6,4444	0,5402
2,5556	7,2222	0,4800
2,5556	8,0000	0,4050
3,3333	1,0000	0,6500
3,3333	1,7778	0,9150
3,3333	2,5556	0,9756
3,3333	3,3333	0,9149
3,3333	4,1111	0,8558
3,3333	4,8889	0,7225
3,3333	5,6667	0,6537
3,3333	6,4444	0,6239
3,3333	7,2222	0,5377
3,3333	8,0000	0,5003
4,1111	1,0000	0,5654
4,1111	1,7778	0,8520
4,1111	2,5556	0,8819
4,1111	3,3333	0,8986
4,1111	4,1111	0,9001
4,1111	4,8889	0,8077
4,1111	5,6667	0,7486

4,1111	6,4444	0,7347
4,1111	7,2222	0,7078
4,1111	8,0000	0,5806
4,8889	1,0000	0,4787
4,8889	1,7778	0,7315
4,8889	2,5556	0,8616
4,8889	3,3333	0,9744
4,8889	4,1111	0,8844
4,8889	4,8889	0,8950
4,8889	5,6667	0,8128
4,8889	6,4444	0,7584
4,8889	7,2222	0,7597
4,8889	8,0000	0,6986
5,6667	1,0000	0,5094
5,6667	1,7778	0,6883
5,6667	2,5556	0,8719
5,6667	3,3333	0,9635
5,6667	4,1111	0,9418
5,6667	4,8889	0,9547
5,6667	5,6667	0,9083
5,6667	6,4444	0,8307
5,6667	7,2222	0,8225
5,6667	8,0000	0,7241
6,4444	1,0000	0,4657
6,4444	1,7778	0,6182
6,4444	2,5556	0,8318
6,4444	3,3333	0,9037
6,4444	4,1111	0,8954
6,4444	4,8889	0,8848
6,4444	5,6667	0,8922
6,4444	6,4444	0,9304
6,4444	7,2222	0,8928
6,4444	8,0000	0,7831
7,2222	1,0000	0,4292
7,2222	1,7778	0,6169
7,2222	2,5556	0,7130
7,2222	3,3333	0,8691
7,2222	4,1111	0,9028
7,2222	4,8889	0,9046
7,2222	5,6667	0,8974
7,2222	6,4444	0,8682
7,2222	7,2222	0,8341
7,2222	8,0000	0,8806
8,0000	1,0000	0,3048
8,0000	1,7778	0,5934
8,0000	2,5556	0,6985
8,0000	3,3333	0,8454
8,0000	4,1111	0,9375
8,0000	4,8889	0,8901
8,0000	5,6667	0,9002
8,0000	6,4444	0,9078
8,0000	7,2222	0,8611

8,0000	8,0000	0,8691

Metodom najmanjih kvadrata izračunati su koeficijenti racionalne funkcije drugog stupnja s dvije varijable:

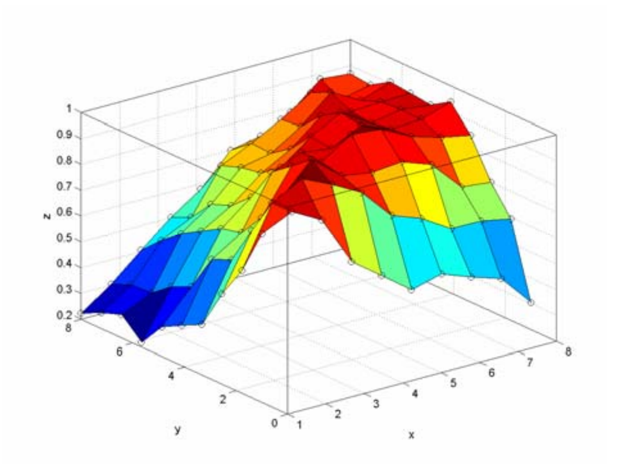
$$z = f(x,y) = \frac{a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2}{b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy + b_5 x^2 + b_6 y^2}$$

$$z = f(x,y) = \frac{0{,}3707 - 0{,}2097x - 0{,}0789y + 0{,}1871xy + 0{,}0292x^2 + 0{,}0155y^2}{0{,}4664 - 0{,}2696x - 0{,}1000y + 0{,}0075xy + 0{,}1059x^2 + 0{,}1567y^2}$$

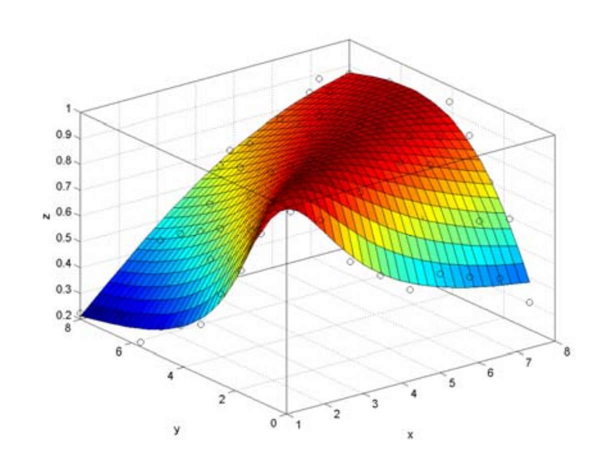
$$\sum R_i^2 = 0{,}0894$$

Originalni podaci dobiveni su funkcijom:

$$z = f(x,y) = \frac{0{,}5xy}{0{,}2x^2 + 0{,}4y^2} + N(0, 0{,}01)$$



a.



b.

Slika 4. Originalni podaci (a) i podaci aproksimirani racionalnom funkcijom drugog stupnja s dvije varijable (b)